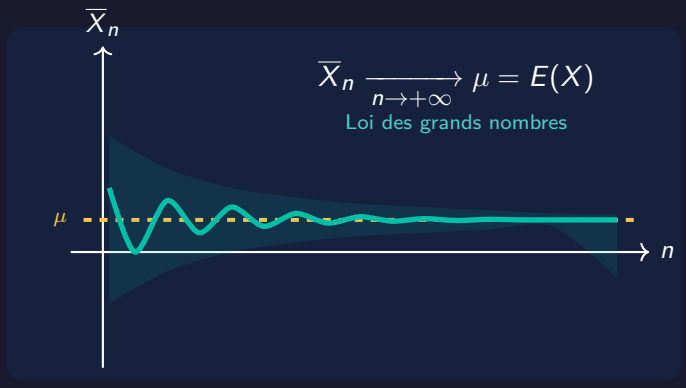
FICHE 17

Somme de variables aléatoires & Loi des grands nombres

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ▪ $\overline{X}_n$ ▪ Concentration ▪ Convergence



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel

Table des matières

1 Pourquoi étudier la somme de variables aléatoires ? 3
- 1.1 De quoi parle-t-on ? . . . 3
- 1.2 Les applications concrètes . . . 3
- 1.3 L'idée directrice . . . 3

2 L'idée avant la formule 4
- 2.1 L'expérience du lancer de dé . . . 4
- 2.2 Pourquoi $\sqrt{n}$ et pas n ? . . . 4
- 2.3 Fréquence et probabilité : le pont . . . 4

3 Le cours formel 5
- 3.1 Rappels : espérance, variance, écart-type . . . 5
- 3.2 Somme de deux variables aléatoires . . . 5
- 3.3 Somme de n variables indépendantes de même loi . . . 6
- 3.4 La moyenne empirique $\overline{X}_n$ . . . 7
- 3.5 Inégalité de Markov . . . 8
- 3.6 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . 8
- 3.7 Inégalité de concentration . . . 9
- 3.8 Loi (faible) des grands nombres . . . 10
- 3.9 Application : intervalle de fluctuation et estimation . . . 10
- 3.10 Cas particulier : retour sur la loi binomiale . . . 11
- 3.11 Covariance (culture — pour la prépa) . . . 12
- 3.12 Somme de VA non identiquement distribuées . . . 13
- 3.13 Comparaison des inégalités — Markov vs Tchebychev vs exact . . . 13
- 3.14 Théorème central limite (culture — pour la prépa) . . . 13
- 3.15 Simulation Python de la loi des grands nombres . . . 15

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac 17

5 Exercices 19

6 Problème — *Le paradoxe de Saint-Pétersbourg* ⭐⭐⭐ 22

7 Corrigés détaillés 23

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

1 Pourquoi étudier la somme de variables aléatoires ?

1.1 De quoi parle-t-on ?

Quand on répète une expérience aléatoire, le résultat total est la **somme** des résultats individuels. Si on lance n dés, le score total est $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Si on répète n fois un sondage, la **moyenne** observée $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$ donne une estimation de la probabilité théorique. La question fondamentale est : **cette moyenne converge-t-elle vers l'espérance ?** La réponse est oui, et c'est la **loi des grands nombres**.

1.2 Les applications concrètes

Sondages
La fréquence converge vers p

Assurance
Risque moyen prévisible

Casino
Le casino gagne sur le long terme

Physique
Mesures répétées réduisent l'erreur

1.3 L'idée directrice

L'idée directrice :

La **somme** de n variables indépendantes a une espérance qui croît comme n et un écart-type qui croît comme $\sqrt{n}$. La **moyenne** $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$ a donc un écart-type qui décroît comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$: les fluctuations se **concentrent** autour de $E(X)$ quand n grandit. C'est la **loi des grands nombres**.

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

2 L'idée avant la formule

2.1 L'expérience du lancer de dé

Intuition | Observer la convergence

On lance un dé équilibré n fois et on calcule la moyenne $\overline{X}_n$ des résultats.

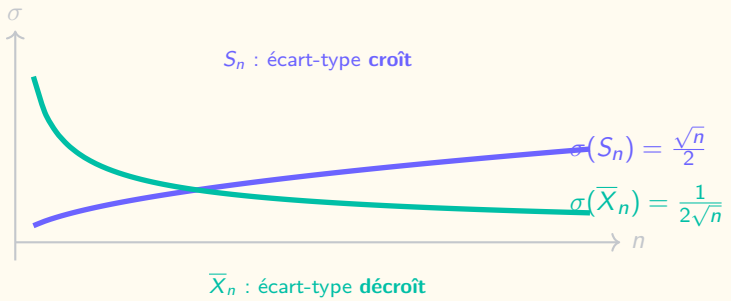
n	Résultats possibles	$\overline{X}_n$ typique
1	un seul lancer	entre 1 et 6
10	beaucoup de variation	entre 2,5 et 4,5
100	variation modérée	entre 3,2 et 3,8
1 000	variation faible	entre 3,45 et 3,55
10 000	quasi-constante	$\approx 3{,}50$

La moyenne $\overline{X}_n$ se **concentre** autour de $E(X) = 3{,}5$. Plus n est grand, plus elle est proche de 3,5. C'est la **loi des grands nombres** en action.

2.2 Pourquoi $\sqrt{n}$ et pas n ?

Intuition | L'écart-type croît en $\sqrt{n}$, pas en n

On lance n pièces. Le nombre de Piles $S_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ a $E(S_n) = \frac{n}{2}$ et $\sigma(S_n) = \frac{\sqrt{n}}{2}$.
Pour la **moyenne** $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$: $E(\overline{X}_n) = \frac{1}{2}$ et $\sigma(\overline{X}_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$.



C'est parce que les fluctuations se **compensent partiellement** (certains termes sont au-dessus de la moyenne, d'autres en dessous). La compensation n'est pas parfaite (sinon $\sigma = 0$), mais elle est suffisante pour que σ croisse seulement en $\sqrt{n}$.

2.3 Fréquence et probabilité : le pont

Intuition | La fréquence observée converge vers la probabilité

On répète n fois une expérience de Bernoulli de paramètre p. La fréquence de succès est $f_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \overline{X}_n$.
La loi des grands nombres dit que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} p = E(X_i)$.
C'est le **fondement** de la définition fréquentiste des probabilités : la probabilité d'un événement est la limite de sa fréquence d'apparition quand le nombre d'expériences tend vers l'infini.

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

3 Le cours formel

3.1 Rappels : espérance, variance, écart-type

Propriété | Rappels essentiels de la Fiche 15

- $E(aX+b) = aE(X)+b$ (linéarité de l'espérance).
- $V(aX+b) = a^2V(X)$ (le $+b$ disparaît).
- $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$.
- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ (formule de König-Huygens).

3.2 Somme de deux variables aléatoires

Définition | Somme de variables aléatoires

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω, leur **somme** $X+Y$ est la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

Théorème | Linéarité de l'espérance — toujours vraie

Pour **toutes** variables aléatoires X et Y (indépendantes ou non) :

$$\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

Plus généralement, pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{E\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b}$$

Attention | L'espérance est linéaire, la variance non !

$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ est **toujours** vrai, même si X et Y ne sont pas indépendantes.
En revanche, $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ n'est vrai **que si X et Y sont indépendantes**.

Définition | Indépendance de variables aléatoires

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si la connaissance de la valeur de X ne modifie pas la loi de Y, et réciproquement. Formellement :

$$\forall (x_i, y_j), \quad P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

Théorème | Variance d'une somme de VA indépendantes

Si X et Y sont **indépendantes** :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** :

$$\boxed{V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)}$$

Attention | L'écart-type ne s'additionne pas

$\sigma(X+Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$ en général. C'est la **variance** qui s'additionne (pour des VA indépendantes), pas l'écart-type.
$\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X)+V(Y)} = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$ (comme Pythagore !).

Exemple | Somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés indépendants X et Y. Le score total est $S = X + Y$.
$E(S) = E(X) + E(Y) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$.
$V(S) = V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} \approx 5{,}83$.
$\sigma(S) = \sqrt{5{,}83} \approx 2{,}42$.
(Rappel : pour un dé équilibré, $E(X) = \frac{7}{2} = 3{,}5$ et $V(X) = \frac{35}{12} \approx 2{,}92$.)

3.3 Somme de n variables indépendantes de même loi

Définition | Variables i.i.d.

Des variables $X_1, \dots, X_n$ sont dites **i.i.d.** (indépendantes et identiquement distribuées) si :

- elles sont **mutuellement indépendantes**,
- elles ont toutes la **même loi** (même espérance μ, même variance σ^2).

Théorème | Espérance et variance de la somme S_n

Si $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d. d'espérance μ et de variance σ^2, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$:

$$\boxed{E(S_n) = n\mu} \qquad \boxed{V(S_n) = n\sigma^2} \qquad \boxed{\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}}$$

Démonstration

$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$ (linéarité de l'espérance).
$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$ (indépendance).

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

Exemple

On lance 100 dés. S_{100} est le score total. $E(S_{100}) = 100 \times 3{,}5 = 350$.
$\sigma(S_{100}) = \sqrt{100 \times \frac{35}{12}} = 10\sqrt{\frac{35}{12}} \approx 17{,}08$.
Le score total est typiquement entre $350 - 2 \times 17 \approx 316$ et $350 + 34 \approx 384$.

3.4 La moyenne empirique $\overline{X}_n$

Définition | Moyenne empirique

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires, la **moyenne empirique** (ou moyenne d'échantillon) est :

$$\boxed{\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}}$$

Théorème | Espérance et variance de $\overline{X}_n$

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d. d'espérance μ et de variance σ^2 :

$$\boxed{E(\overline{X}_n) = \mu} \qquad \boxed{V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}} \qquad \boxed{\sigma(\overline{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Démonstration | Exigible

$\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n$. Par les propriétés de l'espérance et de la variance :
$E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{n\mu}{n} = \mu$.
$V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.
$\sigma(\overline{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Propriété | Propriétés essentielles de $\overline{X}_n$

- $\overline{X}_n$ est un estimateur **non biaisé** de μ : $E(\overline{X}_n) = \mu$ exactement.
- La variance $\frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$: la dispersion **diminue** quand n augmente.
- L'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ décroît en $\frac{1}{\sqrt{n}}$: pour diviser l'erreur par 2, il faut multiplier n par 4.
- Pour diviser l'erreur par 10, il faut multiplier n par 100.

Exemple | Sondage

On sonde n personnes. Chaque réponse $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ avec p inconnu. La fréquence $f_n = \overline{X}_n$ a $\sigma(f_n) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (car $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$).
Pour $n = 1000$: $\sigma(f_n) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1000}} \approx 0{,}016 \approx 1{,}6\%$.

Pour $n = 10\,000$: $\sigma(f_n) \leqslant 0{,}5\%$. La précision augmente en $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.5 Inégalité de Markov

Théorème | Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire **positive** ($X \geqslant 0$), alors pour tout $a > 0$:

$$\boxed{P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}}$$

Démonstration

$E(X) = \sum_{x \geqslant 0} x\, P(X = x) \geqslant \sum_{x \geqslant a} x\, P(X = x) \geqslant \sum_{x \geqslant a} a\, P(X = x) = a\, P(X \geqslant a)$.
D'où $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$.

Exemple

Un dé équilibré : $E(X) = 3{,}5$. $P(X \geqslant 5) \leqslant \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$. (Valeur exacte : $\frac{2}{6} \approx 0{,}33$.)
L'inégalité est **grossière** mais **universelle** : elle ne dépend que de $E(X)$.

3.6 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème | Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour **toute** variable aléatoire X d'espérance μ et de variance σ^2, et pour tout $\delta > 0$:

$$\boxed{P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\sigma^2}{\delta^2} = \frac{V(X)}{\delta^2}}$$

Autrement dit : la probabilité que X s'écarte de plus de δ de sa moyenne est au plus $\frac{V(X)}{\delta^2}$.

Démonstration | Exigible

On applique Markov à $Y = (X - \mu)^2 \geqslant 0$ avec $a = \delta^2$:
$P(Y \geqslant \delta^2) \leqslant \frac{E(Y)}{\delta^2} = \frac{E\left[(X-\mu)^2\right]}{\delta^2} = \frac{V(X)}{\delta^2}$.
Or $Y \geqslant \delta^2 \iff (X - \mu)^2 \geqslant \delta^2 \iff |X - \mu| \geqslant \delta$.

Propriété | Forme avec k écarts-types

En posant $\delta = k\sigma$ ($k > 0$) :

$$\boxed{P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}}$$

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

k	$P(\lvert X-\mu\rvert \geqslant k\sigma) \leqslant$	$P(\lvert X-\mu\rvert < k\sigma) \geqslant$
1	1 (trivial)	0%
2	$\frac{1}{4} = 25\%$	75%
3	$\frac{1}{9} \approx 11\%$	89%
5	$\frac{1}{25} = 4\%$	96%
10	$\frac{1}{100} = 1\%$	99%

Exemple | Application concrète

$X \sim \mathcal{B}(100,\ 0{,}5)$. $\mu = 50$, $\sigma = 5$.
Tchebychev : $P(|X-50| \geqslant 15) \leqslant \frac{25}{225} = \frac{1}{9} \approx 11\%$ (avec $\delta = 15 = 3\sigma$).
Valeur exacte : $P(|X-50| \geqslant 15) \approx 0{,}3\%$. L'inégalité est grossière, mais elle est **valable pour toute loi**.

3.7 Inégalité de concentration

Théorème | Inégalité de concentration — application de Tchebychev à $\overline{X}_n$

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d. d'espérance μ et de variance σ^2, alors pour tout $\delta > 0$:

$$\boxed{P(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\delta^2}}$$

Le membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$: $\overline{X}_n$ se **concentre** autour de μ.

Démonstration | Exigible

On applique Bienaymé-Tchebychev à $\overline{X}_n$:
$P(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(\overline{X}_n)}{\delta^2} = \frac{\sigma^2/n}{\delta^2} = \frac{\sigma^2}{n\delta^2}$.

Exemple | Sondage : marge d'erreur

Sondage de $n = 1000$ personnes, $p = 0{,}5$ (pire cas), $\sigma^2 = p(1-p) = 0{,}25$.
$P(|f_n - p| \geqslant 0{,}05) \leqslant \frac{0{,}25}{1000 \times 0{,}0025} = \frac{0{,}25}{2{,}5} = 0{,}1 = 10\%$.
La fréquence est à moins de 5 points de la probabilité avec au moins 90% de confiance.
Pour $n = 10\,000$: $P(|f_n - p| \geqslant 0{,}05) \leqslant 1\%$. Confiance 99%.

3.8 Loi (faible) des grands nombres

Théorème | Loi faible des grands nombres

Si $X_1, X_2, \ldots$ sont i.i.d. d'espérance μ et de variance σ^2, alors pour tout $\delta > 0$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \delta) = 0}$$

On dit que $\overline{X}_n$ converge en **probabilité** vers μ : $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \mu$.

Démonstration | Conséquence directe de l'inégalité de concentration

Pour tout $\delta > 0$: $0 \leqslant P(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\delta^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par le théorème des gendarmes : $P(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \delta) \to 0$.

Propriété | Interprétation

- La moyenne $\overline{X}_n$ **converge vers** μ quand $n \to +\infty$.
- La fréquence f_n d'un événement converge vers sa probabilité p.
- Ceci **justifie** l'utilisation de sondages, de simulations, de moyennes expérimentales.
- La convergence est **lente** : en $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour gagner un chiffre de précision, il faut 100 fois plus de données.

Attention | Ce que la LGN ne dit pas

- Elle ne dit **pas** que $\overline{X}_n = \mu$ exactement (seulement que $\overline{X}_n \approx \mu$ avec grande probabilité).
- Elle ne dit **pas** qu'après une série de Pile, Face est « plus probable » (**erreur du joueur**).
- Elle ne donne **pas** la vitesse exacte de convergence (Tchebychev donne une borne supérieure).
- Les épreuves doivent être **indépendantes** : si les X_i sont corrélées, la LGN peut échouer.

3.9 Application : intervalle de fluctuation et estimation

Propriété | Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil α

Pour $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{B}(p)$, la fréquence $f_n = \overline{X}_n$ vérifie (par Tchebychev) :

$$P\left(|f_n - p| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n \cdot \frac{1}{n}} = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$$

Pour un seuil de 5% : on cherche δ tel que $\frac{1}{4n\delta^2} \leqslant 0{,}05$, i.e. $\delta \geqslant \frac{1}{\sqrt{20n}}$.
L'**intervalle de fluctuation** (approximatif par Tchebychev) au seuil 95% est :

$$\boxed{I_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{20n}} \,;\, p + \frac{1}{\sqrt{20n}}\right]}$$

Attention | Cet intervalle est large car Tchebychev est grossier

En pratique, au bac, on utilise souvent l'intervalle de fluctuation de la loi binomiale ou l'approximation normale (hors programme strict, mais mentionnée). L'intervalle par Tchebychev est plus large mais **garanti sans hypothèse sur la loi**.

Méthode | Intervalle de confiance pour une proportion

On observe f_n et on veut estimer p (inconnu). On utilise :

$$\boxed{p \in \left[f_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]} \quad \text{avec un niveau de confiance d'au moins 75\%}$$

car $\frac{p(1-p)}{n \cdot \frac{1}{n}} = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$, donc $P(|f_n - p| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}) \leqslant \frac{1}{4}$.

Exemple

Sur $n = 400$ personnes, $f_{400} = 0{,}55$ de réponses favorables.
Intervalle de confiance (Tchebychev, 75%) : $p \in [0{,}55 - \frac{1}{20} \,;\, 0{,}55 + \frac{1}{20}] = [0{,}50 \,;\, 0{,}60]$.
Intervalle plus serré (95%, Tchebychev) : $\delta = \frac{1}{\sqrt{20 \times 400}} = \frac{1}{\sqrt{8000}} \approx 0{,}011$.
$p \in [0{,}539 \,;\, 0{,}561]$.

3.10 Cas particulier : retour sur la loi binomiale

Propriété | La loi binomiale est une somme de Bernoulli

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $X = X_1 + \cdots + X_n$ où les $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ i.i.d. Donc :
$E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$
sont des cas particuliers des formules générales $E(S_n) = n\mu$, $V(S_n) = n\sigma^2$ avec $\mu = p$, $\sigma^2 = p(1-p)$.

Propriété | Concentration de la binomiale

Pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $\delta > 0$:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

3.11 Covariance (culture — pour la prépa)

Définition | Covariance de deux variables aléatoires

La **covariance** de X et Y est :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}$$

Elle mesure la **dépendance linéaire** entre X et Y : positive si elles varient dans le même sens, négative si elles varient en sens opposé, nulle si elles sont indépendantes.

Propriété | Propriétés de la covariance

- $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X)$.
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$ (symétrie).
- $\mathrm{Cov}(aX + b,\, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$ (bilinéarité).
- Si X et Y indépendantes : $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ (mais la réciproque est fausse).

Théorème | Formule générale de la variance d'une somme

Pour **toutes** variables X et Y (indépendantes ou non) :

$$\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)}$$

Plus généralement :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Si les X_i sont indépendantes, les covariances sont nulles et on retrouve $V(\sum X_i) = \sum V(X_i)$.

Démonstration

$V(X + Y) = E[(X + Y - E(X + Y))^2] = E[(X - \mu_X) + (Y - \mu_Y)]^2$
$= E[(X - \mu_X)^2] + E[(Y - \mu_Y)^2] + 2E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$
$= V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exemple | Retour sur l'exercice 10 — tirages sans remise

Dans l'exercice 10 (urne, sans remise) : $V(X) = V(Y) = \frac{6}{25}$ et $V(X+Y) = \frac{9}{25}$.
$\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\left[V(X+Y) - V(X) - V(Y)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{9}{25} - \frac{12}{25}\right] = -\frac{3}{50}$.
La covariance est **négative** : si $X = 1$ (rouge), Y a moins de chance d'être 1. C'est typique du tirage **sans remise**.

3.12 Somme de VA non identiquement distribuées

Propriété | Cas général : somme de VA indépendantes (non nécessairement i.i.d.)

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont **indépendantes** (mais pas forcément de même loi), avec $E(X_i) = \mu_i$ et $V(X_i) = \sigma_i^2$:

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \qquad V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Exemple | Score total avec des dés différents

On lance un dé à 4 faces (X_1, $E = 2{,}5$, $V = \frac{5}{4}$) et un dé à 6 faces (X_2, $E = 3{,}5$, $V = \frac{35}{12}$), indépendamment.
$E(X_1 + X_2) = 2{,}5 + 3{,}5 = 6$. $V(X_1 + X_2) = \frac{5}{4} + \frac{35}{12} = \frac{15+35}{12} = \frac{50}{12} \approx 4{,}17$.

3.13 Comparaison des inégalités — Markov vs Tchebychev vs exact

Propriété | Tableau comparatif

Pour $X \sim \mathcal{B}(100,\ 0{,}5)$ ($\mu = 50$, $\sigma^2 = 25$), comparons les bornes supérieures :

Événement	Markov	Tchebychev	Exacte
$P(X \geqslant 60)$	$\leqslant 0{,}833$	$\leqslant 0{,}250$	$\approx 0{,}028$
$P(X \geqslant 70)$	$\leqslant 0{,}714$	$\leqslant 0{,}063$	$\approx 0{,}000\,02$
$P(\lvert X - 50\rvert \geqslant 10)$	—	$\leqslant 0{,}250$	$\approx 0{,}056$
$P(\lvert X - 50\rvert \geqslant 20)$	—	$\leqslant 0{,}063$	$\approx 0{,}000\,04$

Conclusion : Markov et Tchebychev sont **très grossiers** mais **universels**. En prépa, on utilise le **théorème central limite** pour des bornes bien plus précises.

3.14 Théorème central limite (culture — pour la prépa)

Théorème | Théorème central limite (TCL) — hors programme, pour culture

Si $X_1, X_2, \ldots$ sont i.i.d. d'espérance μ et de variance $\sigma^2 > 0$, alors la variable **centrée réduite** de S_n :

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

converge en loi vers la **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leqslant z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

Intuition | Ce que dit le TCL en pratique

Pour n grand, $\overline{X}_n$ se comporte **approximativement** comme une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$:

- $P(|\overline{X}_n - \mu| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 68\%$ (règle 1σ)
- $P(|\overline{X}_n - \mu| < \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 95\%$ (règle 2σ)
- $P(|\overline{X}_n - \mu| < \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}) \approx 99{,}7\%$ (règle 3σ)

C'est beaucoup plus précis que Tchebychev (75%, 89%, 0% respectivement pour 1σ, 2σ, 3σ par la borne).

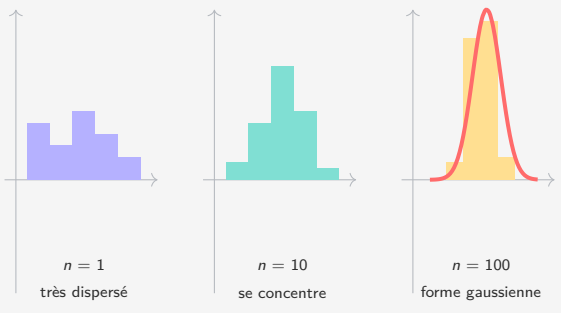
Exemple | Application du TCL à un sondage

Sondage de $n = 1000$ personnes, $p = 0{,}5$. $\sigma = \sqrt{p(1-p)} = 0{,}5$.
$\sigma(\overline{X}_n) = \frac{0{,}5}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}0158$.
Par le TCL : $P(|f_n - 0{,}5| < 0{,}032) \approx P(|Z| < 2) \approx 95\%$.
Intervalle de confiance à 95% (TCL) : $[0{,}468\,;\,0{,}532]$.
Par Tchebychev : il faudrait $\delta \approx 0{,}079$ pour la même confiance. Le TCL est $\approx 2{,}5$ fois plus précis.

Propriété | Lien TCL → LGN

Le TCL est **plus fort** que la LGN : il donne non seulement la convergence de $\overline{X}_n$ vers μ, mais aussi la **vitesse** de convergence et la **forme** des fluctuations (gaussiennes). La LGN dit « $\overline{X}_n \approx \mu$ », le TCL dit « $\overline{X}_n \approx \mu \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \mathcal{N}(0,1)$ ».

Illustration : histogramme de $\overline{X}_n$ pour n croissant



« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

3.15 Simulation Python de la loi des grands nombres

Méthode | Simulation et visualisation

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 10000    # nombre de lancers
p = 0.5      # probabilité de succès

# Simulation
X = np.random.binomial(1, p, size=n)  # n épreuves de Bernoulli
moyennes = np.cumsum(X) / np.arange(1, n + 1)

# Graphique
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(moyennes, color='steelblue', linewidth=0.8)
plt.axhline(y=p, color='red', linestyle='--', label=f' = {p}')
plt.fill_between(range(1, n+1),
    p - 1/np.sqrt(np.arange(1, n+1)),
    p + 1/np.sqrt(np.arange(1, n+1)),
    alpha=0.15, color='orange', label='± 1/n')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('Moyenne empirique')
plt.title('Loi des grands nombres : convergence de X')
plt.legend()
plt.show()
```

Méthode | Illustration du TCL par simulation

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Illustration du TCL : histogramme de Xbar_n
n_values = [1, 5, 30, 100]
N_sims = 10000     # nombre de simulations
p = 0.3

fig, axes = plt.subplots(1, 4, figsize=(16, 3))
for ax, n in zip(axes, n_values):
    # Simuler N_sims moyennes de n Bernoulli(p)
    moyennes = [np.mean(np.random.binomial(1, p, n))
                for _ in range(N_sims)]
    ax.hist(moyennes, bins=30, density=True,
            color='steelblue', alpha=0.7)
    ax.axvline(p, color='red', linestyle='--')
    ax.set_title(f'n = {n}')
    ax.set_xlim(-0.1, 1.1)
plt.suptitle('TCL : X → forme gaussienne', y=1.02)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

Méthode | Vérification numérique de Tchebychev

```
# Vérifier que la borne de Tchebychev est bien respectée
n, p, delta = 1000, 0.5, 0.05
N_sims = 100000
freq = np.array([np.mean(np.random.binomial(1, p, n))
                 for _ in range(N_sims)])
proba_empirique = np.mean(np.abs(freq - p) >= delta)
borne_tchebychev = p * (1 - p) / (n * delta**2)
print(f"P(|f_n - p| >= {delta})  {proba_empirique:.4f}")
print(f"Borne Tchebychev      <= {borne_tchebychev:.4f}")
# Exemple : P  0.0012, borne  0.1000 (très grossière)
```

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Les 10 réflexes essentiels

1. **Linéarité de l'espérance :** $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ **toujours** (indépendance ou non).
2. **Additivité de la variance :** $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ **seulement si indépendantes**.
3. **Somme i.i.d. :** $E(S_n) = n\mu$, $V(S_n) = n\sigma^2$, $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$.
4. **Moyenne empirique :** $E(\overline{X}_n) = \mu$, $V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
5. **Tchebychev :** $P(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$.
6. **Concentration :** $P(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\delta^2} \to 0$.
7. **LGN :** $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ quand $n \to +\infty$.
8. **Précision en** $\frac{1}{\sqrt{n}}$: multiplier n par 4 pour diviser l'erreur par 2.
9. **L'écart-type ne s'additionne pas :** $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2} \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$.
10. **Erreur du joueur :** la LGN ne dit **pas** que les résultats futurs compensent les résultats passés.

Méthode | Mots-clés à repérer dans les énoncés

Tu lis dans l'énoncé…	Tu penses à…
« on répète n fois »	somme S_n de VA i.i.d.
« moyenne observée / empirique »	$\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$
« fréquence »	$f_n = \overline{X}_n$ avec $X_i \sim \mathcal{B}(p)$
« indépendamment »	variance additive, LGN applicable
« intervalle de confiance »	$[f_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_n + \frac{1}{\sqrt{n}}]$
« majorer la probabilité que »	Markov ou Tchebychev
« montrer que $\overline{X}_n$ se concentre »	inégalité de concentration
« en déduire la convergence »	théorème des gendarmes
« combien d'essais pour »	résoudre $\frac{\sigma^2}{n\delta^2} \leqslant \alpha$
« fluctuation »	intervalle $[p-\delta ; p+\delta]$

Attention | Top 6 des erreurs au bac

1. **Additionner les écarts-types.** $\sigma(X+Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$! Ce sont les **variances** qui s'additionnent.
2. **Utiliser** $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ **sans vérifier l'indépendance.**

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

3. **Confondre $V(S_n) = n\sigma^2$ et $V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.** L'un croît, l'autre décroît.
4. **Oublier $\frac{1}{n^2}$** dans $V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n)$. C'est $\frac{1}{n^2}$ (pas $\frac{1}{n}$) car $V(aX) = a^2V(X)$.
5. **Croire que $\overline{X}_n = \mu$ exactement.** Non : $\overline{X}_n \approx \mu$ avec grande probabilité.
6. **Erreur du joueur.** Après 10 Piles, Face n'est **pas** plus probable au lancer suivant.

Méthode | Récapitulatif complet des formules

Résultat	Formule
Linéarité de E	$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$
Variance (transf. affine)	$V(aX + b) = a^2V(X)$
V si indépendantes	$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
Somme S_n (i.i.d.)	$E(S_n) = n\mu, \quad V(S_n) = n\sigma^2$
Moyenne $\overline{X}_n$	$E(\overline{X}_n) = \mu, \quad V(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
Markov	$P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a} \quad (X \geqslant 0)$
Tchebychev	$P(\lvert X - \mu\rvert \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$
Concentration	$P(\lvert\overline{X}_n - \mu\rvert \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\delta^2}$
LGN	$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \mu$
Int. de confiance (75%)	$p \in \left[f_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

5 Exercices

Exercice 1 ⭐☆☆ — Espérance et variance d'une somme

On lance deux dés équilibrés indépendants X et Y.

a) Rappeler $E(X)$ et $V(X)$.
b) Calculer $E(X+Y)$ et $V(X+Y)$.
c) Calculer $\sigma(X+Y)$. Vérifier que $\sigma(X+Y) \neq \sigma(X)+\sigma(Y)$.
d) Calculer $E(3X-2Y+1)$.

Exercice 2 ⭐☆☆ — Somme de Bernoulli

$X_1, \ldots, X_{20}$ sont i.i.d. $\mathcal{B}(0{,}4)$.

a) Déterminer la loi de $S_{20} = X_1 + \cdots + X_{20}$.
b) Calculer $E(S_{20})$, $V(S_{20})$ et $\sigma(S_{20})$.
c) Calculer $E(\overline{X}_{20})$, $V(\overline{X}_{20})$ et $\sigma(\overline{X}_{20})$.

Exercice 3 ⭐☆☆ — Moyenne empirique

On mesure la température n fois. Chaque mesure X_i a pour espérance $\mu = 20$ et écart-type $\sigma = 2$.

a) Calculer $E(\overline{X}_n)$ et $\sigma(\overline{X}_n)$ pour $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$.
b) Combien de mesures faut-il pour avoir $\sigma(\overline{X}_n) \leqslant 0{,}1$?

Exercice 4 ⭐⭐☆ — Tchebychev

X est une VA d'espérance 10 et de variance 4.

a) Majorer $P(|X-10| \geqslant 3)$.
b) Majorer $P(|X-10| \geqslant 6)$.
c) Majorer $P(X \leqslant 4 \text{ ou } X \geqslant 16)$.
d) Déterminer δ tel que $P(|X-10| \geqslant \delta) \leqslant 0{,}05$.

Exercice 5 ⭐⭐☆ — Concentration de la fréquence

On lance n fois une pièce équilibrée ($p = 0{,}5$). f_n est la fréquence de Pile.

a) Exprimer $V(f_n)$ en fonction de n.
b) Majorer $P(|f_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}05)$ en fonction de n (Tchebychev).
c) Déterminer n pour que cette borne soit $\leqslant 5\%$.
d) Déterminer n pour que $P(|f_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}01) \leqslant 1\%$.

Exercice 6 ⭐⭐☆ — Loi des grands nombres en action

Soit $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. avec $E(X_i) = 7$ et $V(X_i) = 9$.

a) Calculer $E(\overline{X}_n)$ et $V(\overline{X}_n)$.
b) Pour $\delta = 0{,}5$, majorer $P(|\overline{X}_n - 7| \geqslant 0{,}5)$.
c) En déduire que $\overline{X}_n \xrightarrow{P} 7$.
d) Combien de termes faut-il pour que la borne soit $\leqslant 2\%$?

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

Exercice 7 ⭐⭐☆ — Intervalle de confiance

Un sondage sur $n = 900$ personnes donne 54% de réponses favorables.

a) Donner un intervalle de confiance à 75% pour p.

b) Donner un intervalle de confiance tel que $P(|f_n - p| \geqslant \delta) \leqslant 5\%$.

c) Combien de personnes faudrait-il interroger pour un intervalle de confiance à 95% de demi-largeur 0,01 ?

Exercice 8 ⭐⭐☆ — Gain moyen au casino

À la roulette, le joueur mise 1€ sur le rouge. Il gagne 1€ avec probabilité $\frac{18}{37}$ et perd 1€ avec probabilité $\frac{19}{37}$.

a) Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$ pour une mise.

b) Le joueur joue $n = 1000$ parties. Calculer $E(S_n)$ et $\sigma(S_n)$.

c) Montrer que $P(S_n > 0) \leqslant \frac{V(S_n)}{[E(S_n)]^2 + V(S_n)}$ (admis) et en déduire que le joueur a peu de chance de gagner.

d) Par la LGN, que vaut $\frac{S_n}{n}$ quand n est grand ? Le casino gagne-t-il toujours ?

Exercice 9 ⭐⭐☆ — Démonstrations de cours

a) Démontrer que $E(\overline{X}_n) = \mu$ et $V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

b) Démontrer l'inégalité de Markov.

c) Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à partir de Markov.

d) Démontrer l'inégalité de concentration et en déduire la loi faible des grands nombres.

Exercice 10 ⭐⭐☆ — Variance d'une somme non indépendante

On tire une boule dans une urne contenant 3 rouges et 2 bleues. On pose $X = 1$ si rouge, 0 sinon. On tire une deuxième boule **sans remise**. On pose $Y = 1$ si rouge, 0 sinon.

a) Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(X + Y)$.

b) Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.

c) Montrer que $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$. (Calculer $V(X + Y)$ directement.)

d) Pourquoi ? (Les tirages ne sont pas indépendants.)

Exercice 11 ⭐⭐☆ — Erreur du joueur

Un joueur a obtenu 10 Piles d'affilée. Il affirme que « Face est maintenant plus probable pour compenser ».

a) La pièce est-elle équilibrée ? Quelle est $P(\text{Face au lancer 11})$?

b) Expliquer pourquoi l'affirmation du joueur est fausse (indépendance).

c) Expliquer comment la LGN est compatible avec cette indépendance : ce n'est pas la « compensation » mais la « dilution » des 10 premiers résultats dans un grand nombre de lancers.

Exercice 12 ⭐⭐☆ — Assurance

Un assureur couvre $n = 10\,000$ clients. Chaque client fait une réclamation (coût 1000€) avec probabilité 0,05, indépendamment.

a) Le coût total S_n suit quelle loi ? Calculer $E(S_n)$ et $\sigma(S_n)$.

b) La prime annuelle est fixée à 60€ par client. Le revenu total est $R = 600\,000$€.

c) Majorer $P(S_n > R)$ par Tchebychev. L'assureur est-il en sécurité ?

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

Exercice 13 ⭐⭐⭐ — Vitesse de convergence et taille d'échantillon

a) Montrer que pour $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ i.i.d., $P(|\overline{X}_n - p| \geqslant \delta) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$.

b) En déduire la **taille d'échantillon minimale** n pour que $P(|\overline{X}_n - p| \geqslant \delta) \leqslant \alpha$: $n \geqslant \frac{1}{4\alpha\delta^2}$.

c) Application : combien de lancers pour estimer p à $\pm 0{,}02$ près avec 99% de confiance ?

d) Un sondage donne $f_n = 0{,}48$ sur $n = 2500$ personnes. Donner un intervalle de confiance à 95% pour p.

Exercice 14 ⭐⭐⭐ — Inégalité de Markov améliorée

a) Soit X une VA positive d'espérance μ et de variance σ^2. Montrer que pour $a > \mu$: $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (a-\mu)^2}$. *Indication :* appliquer Tchebychev avec $\delta = a - \mu$ et utiliser $P(X \geqslant a) \leqslant P(|X - \mu| \geqslant a - \mu)$.

b) Application : pour $X \sim \mathcal{B}(100, 0{,}5)$, majorer $P(X \geqslant 70)$ par Markov, Tchebychev, et cette inégalité améliorée. Comparer.

6 Problème — *Le paradoxe de Saint-Pétersbourg* ⭐⭐⭐

Problème style prépa

On lance une pièce équilibrée répétitivement jusqu'à obtenir Pile pour la première fois. Si Pile apparaît au lancer numéro k, le joueur gagne 2^k euros. Combien faudrait-il payer pour jouer à ce jeu ?

On note T le numéro du lancer où Pile apparaît pour la première fois. Ainsi $T \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ et le gain est $G = 2^T$.

Partie A — La loi géométrique

1. Montrer que $P(T = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ pour $k \geqslant 1$.
2. Vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k) = 1$.
3. Calculer $E(T)$. *Indication :* utiliser $\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$.
4. Calculer $V(T)$.

Partie B — Le paradoxe

5. Montrer que $E(G) = E(2^T) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.
6. L'espérance du gain est **infinie**. Un joueur rationnel devrait donc accepter de payer n'importe quelle somme pour jouer. Pourtant, personne ne paierait 1 000€ pour jouer. Expliquer ce **paradoxe**.
7. On joue n fois. Le gain moyen est $\overline{G}_n = \frac{G_1 + \cdots + G_n}{n}$. La loi des grands nombres s'applique-t-elle ? Pourquoi ?

Partie C — Résolution par le gain tronqué

8. On tronque le gain : $G_M = \min(2^T, 2^M)$ (le casino limite le gain à 2^M). Montrer que $E(G_M) = M + 1$.
9. Pour $M = 20$ (gain max ≈ 1 million), calculer $E(G_{20})$. Est-ce raisonnable ?
10. **(Bonus — solution de Bernoulli)** Daniel Bernoulli (1738) proposa de remplacer le gain par son **logarithme** (utilité). Calculer $E(\ln G) = E(T \ln 2) = (\ln 2)\, E(T)$. Quelle mise correspondrait à cette utilité ?

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

7 ✔✔ Corrigés détaillés

Exercice 1

a) Dé équilibré : $E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

$E(X^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$. $V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12} \approx 2{,}92$.

b) $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$.

$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} = \frac{35}{6} \approx 5{,}83$ (indépendance).

c) $\sigma(X+Y) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2{,}42$. $\sigma(X) + \sigma(Y) = 2\sqrt{\frac{35}{12}} \approx 2 \times 1{,}71 = 3{,}42 \neq 2{,}42$. ✗

d) $E(3X - 2Y + 1) = 3E(X) - 2E(Y) + 1 = 3 \times 3{,}5 - 2 \times 3{,}5 + 1 = 10{,}5 - 7 + 1 = 4{,}5$.

Exercice 2

a) $S_{20} = \sum X_i$ avec $X_i \sim \mathcal{B}(0{,}4)$ i.i.d. Donc $S_{20} \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}4)$.

b) $E(S_{20}) = 20 \times 0{,}4 = 8$. $V(S_{20}) = 20 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 4{,}8$. $\sigma(S_{20}) = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}19$.

c) $E(\overline{X}_{20}) = 0{,}4$. $V(\overline{X}_{20}) = \frac{0{,}24}{20} = 0{,}012$. $\sigma(\overline{X}_{20}) = \sqrt{0{,}012} \approx 0{,}110$.

Exercice 3

a) $E(\overline{X}_n) = 20$ pour tout n.

$\sigma(\overline{X}_n) = \frac{2}{\sqrt{n}}$: pour $n = 10$: $\frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0{,}632$. Pour $n = 100$: $\frac{2}{10} = 0{,}2$. Pour $n = 1000$: $\frac{2}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}063$.

b) $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}1 \iff \sqrt{n} \geqslant 20 \iff n \geqslant 400$. Il faut au moins $\boxed{400}$ mesures.

Exercice 4

$\mu = 10$, $\sigma^2 = V(X) = 4$.

a) $P(|X - 10| \geqslant 3) \leqslant \frac{4}{9} \approx 0{,}44$.

b) $P(|X - 10| \geqslant 6) \leqslant \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$.

c) $\{X \leqslant 4 \text{ ou } X \geqslant 16\} = \{|X - 10| \geqslant 6\}$. $P \leqslant \frac{1}{9} \approx 0{,}11$.

d) $\frac{4}{\delta^2} \leqslant 0{,}05 \iff \delta^2 \geqslant \frac{4}{0{,}05} = 80 \iff \delta \geqslant \sqrt{80} \approx 8{,}94$. Prendre $\boxed{\delta \approx 8{,}94}$.

Exercice 5

$f_n = \overline{X}_n$ avec $X_i \sim \mathcal{B}(0{,}5)$.

a) $V(f_n) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0{,}25}{n}$.

b) $P(|f_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}05) \leqslant \frac{0{,}25}{n \times 0{,}0025} = \frac{100}{n}$.

c) $\frac{100}{n} \leqslant 0{,}05 \iff n \geqslant 2000$. $\boxed{n = 2000}$.

d) $\frac{0{,}25}{n \times 0{,}0001} \leqslant 0{,}01 \iff \frac{2500}{n} \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant 250\,000$. $\boxed{n = 250\,000}$.

Exercice 6

$\mu = 7$, $\sigma^2 = 9$.

a) $E(\overline{X}_n) = 7$, $V(\overline{X}_n) = \frac{9}{n}$.

b) $P(|\overline{X}_n - 7| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{9}{n \times 0{,}25} = \frac{36}{n}$.

c) Pour tout $\delta > 0$: $P(|\overline{X}_n - 7| \geqslant \delta) \leqslant \frac{9}{n\delta^2} \to 0$. Donc $\overline{X}_n \xrightarrow{P} 7$.

d) $\frac{36}{n} \leqslant 0{,}02 \iff n \geqslant 1800$. $\boxed{n = 1800}$.

Exercice 7

$n = 900$, $f_n = 0{,}54$.

a) IC à 75% : $p \in [f_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f_n + \frac{1}{\sqrt{n}}] = [0{,}54 - \frac{1}{30} \,;\, 0{,}54 + \frac{1}{30}] = [0{,}507 \,;\, 0{,}573]$.

b) $P(|f_n - p| \geqslant \delta) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2} \leqslant 0{,}05 \iff \delta \geqslant \frac{1}{\sqrt{4 \times 900 \times 0{,}05}} = \frac{1}{\sqrt{180}} \approx 0{,}0745$.

IC à 95% : $p \in [0{,}54 - 0{,}075 \,;\, 0{,}54 + 0{,}075] = [0{,}465 \,;\, 0{,}615]$.

c) $\frac{1}{4n\delta^2} \leqslant 0{,}05$ avec $\delta = 0{,}01$: $n \geqslant \frac{1}{4 \times 0{,}05 \times 0{,}0001} = \frac{1}{0{,}00002} = 50\,000$.

Exercice 8

a) $X_i = +1$ avec $p = \frac{18}{37}$ et $X_i = -1$ avec $q = \frac{19}{37}$.

$E(X_i) = \frac{18}{37} - \frac{19}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0{,}027$.

$E(X_i^2) = 1$. $V(X_i) = 1 - \frac{1}{37^2} = \frac{1368}{1369} \approx 0{,}999$.

b) $E(S_{1000}) = 1000 \times (-\frac{1}{37}) \approx -27{,}0$ €.

$\sigma(S_{1000}) = \sqrt{1000 \times 0{,}999} \approx 31{,}6$ €.

c) L'inégalité donne $P(S_n > 0) \leqslant \frac{V(S_n)}{[E(S_n)]^2 + V(S_n)} = \frac{999}{27^2 + 999} = \frac{999}{1728} \approx 0{,}578$.

Cette borne n'est pas très serrée, mais le gain attendu étant négatif, le joueur perd en moyenne.

d) $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} -\frac{1}{37} \approx -0{,}027$. Le gain moyen par partie converge vers $-2{,}7$ centimes. Le casino gagne en moyenne 2,7% de chaque mise : c'est la **marge du casino**. Sur le long terme, le casino gagne **toujours**.

Exercice 9

a) $E(\overline{X}_n) = E(\frac{1}{n}\sum X_i) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu$.

$V(\overline{X}_n) = V(\frac{1}{n}\sum X_i) = \frac{1}{n^2}\sum V(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$ (indépendance).

b) Voir la démo dans le cours (section 3.5).

c) Poser $Y = (X - \mu)^2 \geqslant 0$. Par Markov : $P(Y \geqslant \delta^2) \leqslant \frac{E(Y)}{\delta^2} = \frac{V(X)}{\delta^2}$. Or $Y \geqslant \delta^2 \iff |X - \mu| \geqslant \delta$.

d) Appliquer Tchebychev à $\overline{X}_n$: $P(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(\overline{X}_n)}{\delta^2} = \frac{\sigma^2}{n\delta^2}$. Comme $\frac{\sigma^2}{n\delta^2} \to 0$, par gendarmes $P(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \delta) \to 0$. C'est la LGN.

Exercice 10

a) $E(X) = \frac{3}{5}$, $E(Y) = \frac{3}{5}$ (par symétrie des couleurs). $E(X+Y) = \frac{6}{5}$.

b) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{25} = \frac{6}{25}$. De même $V(Y) = \frac{6}{25}$.

c) $X+Y$ est le nombre de rouges en 2 tirages sans remise. Valeurs possibles : $0, 1, 2$.

$P(X+Y=0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

$P(X+Y=2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

$P(X+Y=1) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$.

$E(X+Y) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$. Vérifié.

$E[(X+Y)^2] = 0 + \frac{6}{10} + 4 \times \frac{3}{10} = \frac{18}{10}$. $V(X+Y) = \frac{18}{10} - (\frac{6}{5})^2 = \frac{9}{5} - \frac{36}{25} = \frac{45-36}{25} = \frac{9}{25}$.

$V(X) + V(Y) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25} \neq \frac{9}{25} = V(X+Y)$.

d) $V(X+Y) < V(X) + V(Y)$ car les variables sont **négativement corrélées** (si la première est rouge, la deuxième a moins de chance d'être rouge). L'indépendance est nécessaire pour l'additivité des variances.

Exercice 11

a) Si la pièce est équilibrée, $P(\text{Face au lancer } 11) = \frac{1}{2}$, **indépendamment** des lancers précédents.

b) Chaque lancer est indépendant. Les résultats passés n'influencent pas les résultats futurs. L'affirmation du joueur est l'**erreur du joueur** (*gambler's fallacy*).

c) La LGN dit que $\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{2}$. Cela ne signifie **pas** que Face va « compenser » les Piles. Après 10 Piles et $n-10$ lancers suivants équilibrés, la fréquence est $\frac{10 + \frac{n-10}{2}}{n} = \frac{1}{2} + \frac{5}{n}$. Pour n grand, le terme $\frac{5}{n} \to 0$: les 10 premiers lancers sont **dilués**, pas **compensés**. La convergence vient du **poids décroissant** des anciens résultats, pas d'une force mystérieuse qui équilibre.

Exercice 12

a) Chaque client fait une réclamation (1000€) avec $p = 0{,}05$, indépendamment. Le nombre de réclamations $N \sim \mathcal{B}(10000\,;\,0{,}05)$ et $S_n = 1000N$.

$E(N) = 500$. $E(S_n) = 500\,000$ €.

$V(N) = 10000 \times 0{,}05 \times 0{,}95 = 475$. $\sigma(N) = \sqrt{475} \approx 21{,}8$.

$\sigma(S_n) = 1000\sigma(N) \approx 21\,800$ €.

b) $R = 10000 \times 60 = 600\,000$ €.

c) $P(S_n > R) = P(S_n > 600\,000) = P(S_n - 500\,000 > 100\,000)$.

$P(|S_n - 500\,000| \geqslant 100\,000) \leqslant \frac{V(S_n)}{100\,000^2} = \frac{1000^2 \times 475}{10^{10}} = \frac{475\,000\,000}{10^{10}} = 0{,}0475 \approx 4{,}8\%$.

Or $P(S_n > 600\,000) \leqslant P(|S_n - 500\,000| \geqslant 100\,000) \leqslant 4{,}8\%$.

L'assureur a moins de 5% de chance de perdre de l'argent. La marge (100 000€) correspond à environ $4{,}6\sigma$: très sécurisant.

Exercice 13

a) $V(f_n) = \frac{p(1-p)}{n} \leqslant \frac{1}{4n}$ car $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$ (maximum en $p = \frac{1}{2}$).

Par Tchebychev : $P(|\overline{X}_n - p| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(f_n)}{\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$.

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

b) $\frac{1}{4n\delta^2} \leqslant \alpha \iff n \geqslant \frac{1}{4\alpha\delta^2}$.

c) $\delta = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}01$: $n \geqslant \frac{1}{4\times 0{,}01\times 0{,}0004} = \frac{1}{0{,}0000016} = 625\,000$.

d) $\frac{1}{4\times 2500\times\delta^2} \leqslant 0{,}05 \iff \delta \geqslant \frac{1}{\sqrt{500}} \approx 0{,}0447$.

IC : $p \in [0{,}48 - 0{,}045\,;\, 0{,}48 + 0{,}045] = [0{,}435\,;\, 0{,}525]$.

Exercice 14

a) Pour $a > \mu$: $P(X \geqslant a) \leqslant P(|X - \mu| \geqslant a - \mu)$ (car $X \geqslant a \Rightarrow X - \mu \geqslant a - \mu > 0 \Rightarrow |X - \mu| \geqslant a - \mu$).

Par Tchebychev : $P(|X - \mu| \geqslant a - \mu) \leqslant \frac{\sigma^2}{(a-\mu)^2}$.

Mais on peut faire mieux. L'inégalité de Cantelli (unilatérale) donne :

$P(X \geqslant a) = P(X - \mu \geqslant a - \mu) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (a-\mu)^2}$.

b) $X \sim \mathcal{B}(100, 0{,}5)$. $\mu = 50$, $\sigma^2 = 25$, $a = 70$.

Markov : $P(X \geqslant 70) \leqslant \frac{50}{70} = \frac{5}{7} \approx 0{,}714$.

Tchebychev : $P(X \geqslant 70) \leqslant P(|X - 50| \geqslant 20) \leqslant \frac{25}{400} = 0{,}0625$.

Cantelli : $P(X \geqslant 70) \leqslant \frac{25}{25+400} = \frac{25}{425} \approx 0{,}059$.

Valeur exacte : $P(X \geqslant 70) \approx 0{,}000\,02$. Les bornes sont grossières mais s'améliorent de Markov à Cantelli.

Corrigé du problème — Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

Partie A — La loi géométrique

1. $T = k$ signifie : les $k - 1$ premiers lancers sont Face, le k-ème est Pile.

$P(T = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

2. $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. C'est bien une loi de probabilité.

3. $E(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$. On utilise $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$.

Avec $x = \frac{1}{2}$: $E(T) = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$. En moyenne, Pile apparaît au 2^{e} lancer.

4. $E(T^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k$. On utilise $\sum k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

$E(T^2) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} = 6$. $V(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = 6 - 4 = 2$. $\sigma(T) = \sqrt{2}$.

Partie B — Le paradoxe

5. $E(G) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

Chaque terme de la somme vaut 1, et il y en a une infinité. L'espérance est donc infinie.

6. Le paradoxe : l'espérance infinie suggère de payer n'importe quel prix pour jouer, mais en pratique :

- Avec probabilité $\frac{1}{2}$, on gagne 2€ (Pile au 1^{er} lancer).
- Avec probabilité $\frac{3}{4}$, on gagne au plus 4€.
- Avec probabilité $\frac{127}{128} \approx 99\%$, on gagne au plus 128€.

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »

Les gains énormes ($2^{20} \approx 1$ million) ont une probabilité infime ($\approx 10^{-6}$). L'espérance infinie est tirée par des événements extrêmement rares. Le joueur réel, lui, ne joue qu'un nombre fini de fois et ne verra **jamais** ces gains astronomiques.

Raisons du paradoxe : l'espérance n'est pas un bon critère de décision quand la distribution est à **queue lourde** (variance infinie), car les événements rares dominent le calcul.

7. La LGN nécessite que $V(X) < +\infty$. Or $V(G) = +\infty$ (car $E(G) = +\infty$ déjà). Donc la LGN ne s'applique **pas** : $\overline{G}_n$ ne converge vers aucune valeur finie. La moyenne empirique fluctue sans se stabiliser, même pour n très grand.

Partie C — Résolution par le gain tronqué

8. $G_M = \min(2^T, 2^M)$. Pour $k \leqslant M$: $G_M = 2^k$ avec $P(T = k) = (\frac{1}{2})^k$. Pour $k > M$: $G_M = 2^M$.

$E(G_M) = \sum_{k=1}^{M} 2^k \cdot (\frac{1}{2})^k + 2^M \cdot P(T > M) = \sum_{k=1}^{M} 1 + 2^M \cdot (\frac{1}{2})^M = M + 1.$

Car $P(T > M) = \sum_{k=M+1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k = (\frac{1}{2})^M$.

9. $E(G_{20}) = 21$ €. Avec un gain maximal de $2^{20} \approx 1\,048\,576$ €, l'espérance n'est que de 21€. C'est beaucoup plus raisonnable : un joueur devrait payer au plus 21€ pour jouer.

10. (Bonus) $E(\ln G) = E(T \ln 2) = (\ln 2)\, E(T) = 2 \ln 2 \approx 1{,}39$.

La mise équivalente en utilité est $e^{2 \ln 2} = e^{\ln 4} = 4$ €. Bernoulli proposait de payer 4€ pour jouer, ce qui est raisonnable. L'idée clé est que l'**utilité marginale** de l'argent décroît : gagner 1 million quand on a 0 a plus de valeur que gagner 1 million quand on a déjà 1 milliard.

Fin de la Fiche 16 — Somme de VA & Loi des grands nombres

Tu maîtrises maintenant :

- La linéarité de l'espérance et l'additivité de la variance (si indépendance).
- Les formules pour S_n et $\overline{X}_n$: $E(S_n) = n\mu$, $V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.
- Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- L'inégalité de concentration et la **loi (faible) des grands nombres**.
- Les intervalles de fluctuation et de confiance.
- L'erreur du joueur et les limites de la LGN (variance infinie).

En théorie des probabilités, la patience est une vertu mathématique.

→ Prochaine étape : Algorithmique & Python.

« La loi des grands nombres est la revanche du long terme sur le court terme. »